සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1990 (විශේෂ — 1991)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1990 (Special — 1991)

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය II
(02) Applied Mathematics II

02	
S	II

පැය තුනයි/*Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1} \sin y$$

(ii) $x - y = v$ ආදේශය භාවිතයෙන් පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණය විසඳන්න. මෙහි v යනු x හි ශ්‍රිතයකි.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 2}{x - y + 1}$$

(iii) $y = vx$ ආදේශය භාවිතයෙන් පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණය විසඳන්න. මෙහි v යනු x හි ශ්‍රිතයකි.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

විසඳුමෙන් නිරූපණය කෙරෙන්නේ වෘත්ත කුලකයක් බව පෙන්වන්න. මෙම වක්‍රවල දළ සටහනක් අඳින්න.

2. ගොඩනැගිල්ලක ඇති සෝපානයක් එහි පළමු මහලේ සිට මීටර h උසකින් පිහිටි ඉහළ ම මාලයට නැගෙයි. මේ සඳහා මිඩංගු වන මුළු කාලය තත්පර T වෙයි. සෝපානය පළමු තත්පර $\frac{T}{3}$ තුළ ඒකාකාර ත්වරණයෙන් ද ඊළඟ තත්පර $\frac{T}{3}$ තුළ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ද ගොස් අවසානයේ ඒකාකාර මන්දනයෙන් ගමන් කරයි. සෝපානයේ ප්‍රවේග – කාල වක්‍රයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

ත්වරණය = මන්දනය = $\frac{9h}{2T^2}$ තත්ට. තත්ට මීටර් බව පෙන්වන්න.

ස්කන්ධය m වූ කාසියක් සෝපානයේ බිම මත තිබෙයි. සෝපානයේ චලිතයෙහි එක් එක් අවධියේ දී සෝපානයේ බිමත් කාසියත් අතර ඇති වන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

$h > \frac{2T^2 g}{9}$ නම් කුමක් සිදුවේ ද?

3. m ස්කන්ධය සහිත ගලක් O නම් ලක්ෂ්‍යයක සිට u ප්‍රවේගයෙන් සිරස් ලෙස උඩු අතට ප්‍රක්ෂේපණය කෙරේ. ගලෙහි චලිතයට වාතයේ ප්‍රතිරෝධය mkv බලයකට සමාන ය. මෙහි v යනු ගලේ ප්‍රවේගය වන අතර k යනු නියතයකි. O ට ඉහළින් ගලේ උපරිම උස h,

$$h = \frac{1}{k}\left[u - \frac{g}{k}\,\text{ලඝු}_e\left(1 + \frac{ku}{g}\right)\right]$$

යනුවෙන් දැක්විය හැකි බව පෙන්වන්න. ගල නැවත O වෙත ළඟා වන්නා වූ V වේගය

$$V + u = a\,\text{ලඝු}_e\left(\frac{a + u}{a - V}\right)$$

සමීකරණය තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න. මෙහි $a = \frac{g}{k}$ වෙයි.

4. M ස්කන්ධය හා α කෝණය සහිත කුඤ්ඤයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. තිරසට α කෝණයකින් ආනත තලය දිගේ උඩු අතට m ස්කන්ධය සහිත අංශුවක් u ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපණය කෙරේ. එය

$$\frac{2u(M + m\sin^2\alpha)}{(M+m)g\sin\alpha}$$

කාලයට පසු තලය මත මුල් ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යට නැවත පැමිණෙන බව පෙන්වන්න. මෙම කාලය තුළ කුඤ්ඤය ගමන් කළ දුර සොයන්න. මේසයට සාපේක්ෂ ව අංශුවේ ගමන් මාර්ගය කුමක් ද?

5. ගති විද්‍යාවේ භාවිත කෙරෙන අන්දමට බලය, කාර්යය හා ජවය යන ඒකකවලට අදළ නිර්වචනය, ජූලය හා වොට්ය යන පදවල අර්ථ දක්වන්න.

පොම්පයක් මගින් විශාල වැවකින් ජලය පොම්ප කර වැව් මට්ටමෙන් මීටර 100 ක උසෙකින් පිහිටි ස්ථානයකට තත්පරයට මීටර 10 ක වේගයෙන් ජලය ලබා දෙයි. පොම්පයේ හරස්කඩය 2 cm අරයකින් යුත් වෘත්තයකි.

(අ) තත්පරයකට ලබා දෙන ජල ප්‍රමාණයේ ස්කන්ධය,

(ආ) එම ජල ස්කන්ධයේ චාලක ශක්තිය,

(ඉ) එම ජල ස්කන්ධයේ වැඩි වූ විභව ශක්ති ප්‍රමාණය,

සොයන්න.

පොම්පයේ කාර්යක්ෂමතාව 80% ක් වෙයි නම්, පොම්පය කිලෝවොට් 16.5 ක ශීඝ්‍රතාවයකින් යුතු ව කාර්යය කරන බව පෙන්වන්න.

($\pi = \frac{22}{7}$, $g = 10\ \mathrm{ms^{-2}}$, ජලය ඝන මීටරයක් 1 000 kg ලෙස සැලකිය හැකි යි.)

6. පිළිවෙලින් S_1, S_2 නම් නැව් දෙකක පිහිටුම් දෛශික $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, Oxy අක්ෂ තලයකට සාපේක්ෂ ව

$$\mathbf{r}_1 = (1 + 4t)\mathbf{i} + 7t\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r}_2 = 6t\,\mathbf{i} + (1 + 8t)\mathbf{j}$$

යනුවෙන් දක්වෙයි. මෙහි t යනු පැයවලින් වූ කාලය වන අතර දුර මනින්නේ මුහුදු සැතපුම්වලිනි. මේවා සොයන්න.

(අ) S_1 ට සාපේක්ෂව S_2 හි පිහිටුම් දෛශිකය,

(ආ) S_1 ට සාපේක්ෂව S_2 හි ප්‍රවේගය,

S_1 හා S_2 අතර කෙටිම දුර මුහුදු සැතැපුම් $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ බව පෙන්වන්න.

7. $\mathbf{u}$ ප්‍රවේගයක් සහිත ව චලනය වන A නම් ගෝලයක් නිශ්චලතාවේ තිබෙන B නම් සමාන ගෝලයක ගැටෙයි. A හා B ගෝලවල කේන්ද්‍ර යා කෙරෙන රේඛාව $\mathbf{u}$ හි දිශාවට ϕ කෝණයකින් ආනත වෙයි. ගැටුමෙන් පසු A ගෝලයේ චලිතයෙහි දිශාව $\mathbf{u}$ හි දිශාව සමග θ කෝණයක් සාදයි.

$$(1 - e)\cot\phi = 2\cot(\theta + \phi) \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

මෙහි e යනු ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය වෙයි.

ගෝල කේවල ප්‍රත්‍යාස්ථ නම් $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$ බව අපෝහනය කොට චාලක ශක්ති හානිය සොයන්න. ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

8. m ස්කන්ධයෙන් යුතු P අංශුවක් $m\,\omega^2 x$ බලයක් මගින් O ලක්ෂ්‍යයක් වෙතට ආකර්ෂණය වෙයි. මෙහි $OP = x$ ද ω යනු නියතයක් ද වෙයි. කාලය $t = 0$ හිදී O සිට a දුරකින් පිහිටි A නම් ලක්ෂ්‍යයක දී අංශුව නිශ්චලතාවෙන් මුදා හරිනු ලැබේ.

$x = a \cos\omega t$ බවත්,

P හි ප්‍රවේගය වන v දක්වෙන්නේ, $v^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$ යනුවෙන් බවත් පෙන්වන්න.

O ලක්ෂ්‍යයෙහි නිශ්චලතාවේ ඇති $2m$ ස්කන්ධය සහිත අංශුවක් සමග P අංශුව ගැටෙයි. අංශු දෙක හාවී $3m$ ස්කන්ධයැති සංයුත වස්තුව $3m\,\omega^2 x$ බලයට භාජනය වෙයි. අලුත් චලිතයෙහි විස්තාරය හා එහි කාලාවර්තය සොයන්න.

9. සිරසට θ කෝණයෙකින් u ප්‍රවේගයක් සහිත ව O ලක්ෂ්‍යයක දී අංශුවක් ප්‍රක්ෂේපණය කෙරේ. අංශුවේ පෙතෙහි වන P ලක්ෂ්‍යක් පිහිටන්නේ OP රේඛාව තිරසට α කෝණයෙකින් ආනත වන අන්දමට ය.

$$OP = \frac{2u^2}{g}\,\frac{\sin\theta\cos(\alpha + \theta)}{\cos^2\alpha} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

α අචල ව පිහිටයි නම් OP වැඩිතම වන්නේ

$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ විට බව පෙන්වා

α වල වෙනස් වෙනස් අගයන් සඳහා P හි පථය සොයන්න.

10. m ස්කන්ධයැති P අංශුවක් කේන්ද්‍රයේ දිශාවට එල්ල වූ $m\,\omega^2\overrightarrow{PO}$ බලයකට භාජනය වෙයි. පහත දැක්වෙන චලිත සමීකරණ ලබා ගන්න.

$$\ddot{x} = -\,\omega^2 x$$
$$\ddot{y} = -\,\omega^2 y$$

මෙහි Oxy [අක්ෂ තලයකට අනුබද්ධයෙන් $P \equiv (x, y)$. P අංශුව (a, o) ලක්ෂයේ සිට (o, u) ප්‍රවේගය සහිත ව ප්‍රක්ෂේපණය කෙරේ. P හි පෙත ඉලිප්සයක් බව පෙන්වන්න.

(i) ඉලිප්සිය පෙත සම්පූර්ණ කිරීමට P ට ගත වන කාලයත්,

(ii) $u > a\omega$ නම්, P හි උපරිම වේගයත්

සොයන්න.

11. (අ) කේන්ද්‍රය O හා අරය a වන අචල ගෝලයක මුදුනෙහි ස්කන්ධය m වන P අංශුවක් නිශ්චලතාවේ තිබෙයි. එය සමතුලිත පිහිටීමෙන් සිරුවෙන් විස්ථාපනය කෙරෙයි. OP රේඛාව උඩු සිරස සමග θ කෝණයක් සාදන විට

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}\,(1 - \cos\theta)$$ බව පෙන්වන්න.

ප්‍රතික්‍රියාව R සොයා, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ විට අංශුව ගෝලයෙන් ඉවතට යන බව පෙන්වන්න.

(ආ) අඩ සිරස් කෝණය α වන කුහර කේතුවක් එහි අක්ෂය සිරස් ව හා ශීර්ෂය පහතට පිහිටන පරිදි තබා ඇත. කේතුවේ සුමට අන්තඃ පෘෂ්ඨය මත අංශුවක් u වේගය සහිත ව අරය a වන තිරස් වෘත්තයක් සලකුණු කරයි.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{ag}{u^2}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

12. ස්කන්ධය m හා දිග $2a$ වන AB ඒකාකාර දණ්ඩක් එහි A කෙළවර රළු තිරස් මේසයක් ස්පර්ශ කරමින් සිරස් පිහිටීමක නිශ්චලතාවේ තිබෙයි. මෙම පිහිටීමේ සිට දණ්ඩ දන් සිරුවෙන් විස්ථාපනය කෙරේ. දණ්ඩ A හිදී ලිස්සා නොයන බව උපකල්පනය කොට කෝණික ප්‍රවේගය $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}\,(1 - \cos\theta)$$

යන්නෙන් දැක්වෙන බව පෙන්වන්න. මෙහි θ යනු සිරසට දණ්ඩේ ආනතිය වෙයි.

R අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{mg}{4}\,(3\cos\theta - 1)^2$ බව පෙන්වන්න.

දණ්ඩ මේසයෙන් ඉවතට යයි ද?